# MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

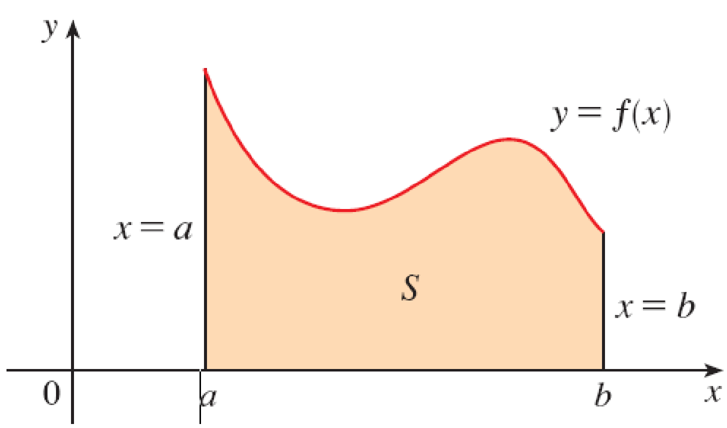
Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

## 5. Integrales

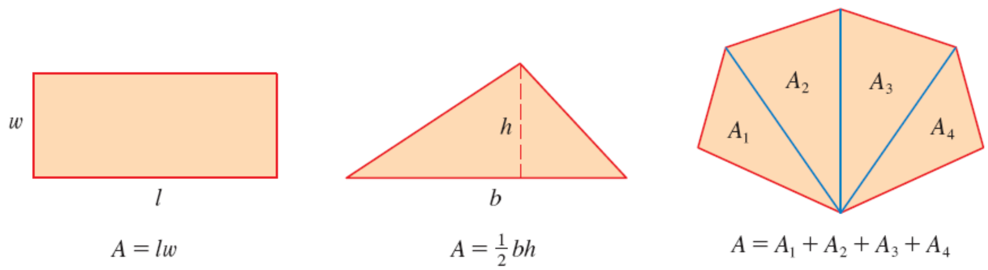
Los problemas del área y de la distancia se utilizan para formular la idea de integral definida, la cual representa el concepto básico del cálculo integral una vez se usa para resolver problemas referentes a volúmenes, longitudes de curvas, predicciones sobre población, gasto cardiaco, fuerzas sobre la cortina de una presa, trabajo, superávit del consumido y béisbol, entre muchos otros.

**El problema del área**

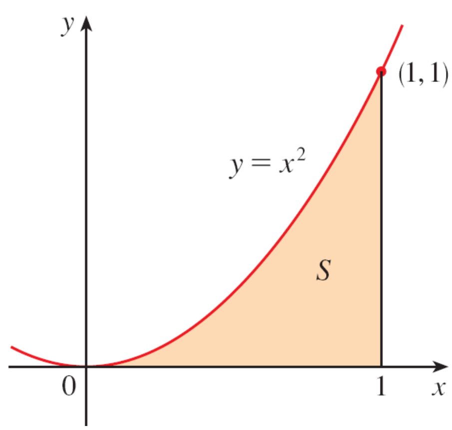
Hallar el área de la región S que está debajo de la curva $y=f(x)$, desde a hasta b. Esto significa que S está limitada por la gráfica de una función continua $f$, las rectas verticales $x=a$ y $x=b$, y el eje $x$.




Al intentar resolver el problema, debe preguntarse; ¿Cuál es el significado de la palabra área? Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos y sumar las áreas de esos triángulos.




Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tienen una idea intuitiva de lo que es el área de una región. Pero parte del problema del área es hacer que esta idea sea precisa dando una definición exacta de área.




Recuerde que al definir una tangente, primero se obtuvo una aproximación de la pendiente de la recta tangente por las pendientes de rectas secantes y, a continuación tomó el límite de estas aproximaciones. Siga una idea similar para las áreas. En primer lugar obtenga una aproximación de la región S por medio de rectángulos y después tome el límite de las áreas de estos rectángulos, como el incremento del número de rectángulos.

De esa forma podemos dar la siguiente definición.

El **área** A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua *f* es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

**El problema de la distancia**

Considere ahora el problema de la distancia: hallar la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo, si se conoce la velocidad del objeto en todos los momentos. Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la fórmula:

Distancia = Velocidad x Tiempo

Pero si la velocidad varía, no es fácil hallar la distancia recorrida. Investigue el problema en el ejemplo siguiente.

Ejemplo: Suponga que el odómetro del automóvil está averiado y que desea estimar la distancia que ha recorrido en 30 segundos. Las lecturas del velocímetro cada cinco segundos están registradas en la tabla siguiente:

| Tiempo (s) 30 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocidad (mi/h) | 17 | 21 | 24 | 29 | 32 | 31 | 28 |

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, convierta las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5280/3600 pies/s):

| Tiempo (s) 30 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocidad (mi/h) | 25 | 31 | 35 | 43 | 47 | 46 | 41 |

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que puede estimar la distancia recorrida durante ese tiempo al suponer que la velocidad es constante. Si la considera igual a la velocidad inicial (25 pies/s), por lo tanto obtiene la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

(25 pies/s)(5s)=125 pies

De manera análoga, durante el segundo intervalo, la velocidad es aproximadamente constante y se toma como la velocidad correspondiente a t = 5 s. De modo que la estimación para la distancia recorrida desde t =5 s hasta t =10 s es

(31 pies/s)(5s)=155 pies

Si suma las estimaciones semejantes para los otros intervalos de tiempo, obtiene una estimación para la distancia total recorrida:

(25 *5) +(31*5)+(35*5)+(43*5)+(47*5)+(46*5)= 1135 pies

Con igual propiedad podría haber usado la velocidad correspondiente al final de cada periodo, en lugar de la velocidad al principio de los mismos, como la supuesta velocidad constante. En tal caso las estimaciones quedarían

(31*5)+(35*5)+(43*5)+(47*5)+(46*5)+(41*5)= 1215 pies

Si buscara una estimación más exacta, habría tomado las lecturas de la velocidad cada dos segundos o cada segundo.

En general, suponga que un objeto se mueve con velocidad $v=f(t)$, de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva. Tome las lecturas de la velocidad en los instantes $t_0$ (=a), $t_1$, $t_2,\ldots$, $t_n$ (=b), de forma que la velocidad sea aproximadamente constante en cada subintervalo. Si estos instantes están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Durante el primer intervalo, la velocidad es más o menos $f(t_0)$ y, por consiguiente, la distancia recorrida es alrededor de $f(t_0)\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo es alrededor de $f(t_1)\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo [a, b] es poco más o menos

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

Si usa la velocidad en los puntos extremos de la derecha, en lugar de los puntos extremos de la izquierda, su estimación para la distancia total se convierte en

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Entre mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas se vuelven las estimaciones, de modo que parece plausible que la distancia exacta d recorrida sea el límite de esas expresiones:

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

## 5.3 Métodos de integración

En virtud del teorema fundamental, es importante poder hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Por ello en esta sección se van a exponer algunos métodos que nos ayuden a resolver este y otros tipos de integrales.

El primer método es el **método de sustitución**.

**REGLA DE SUSTITUCIÓN** Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo $I$, y $f$ es continua sobre $I$, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx,$ de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución expresa: **es permitido operar con dx y du después de los signos de integral como si fueran diferenciales.**

**Ejemplo.** Encuentre $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$

Haga la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3dx,$ la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3dx = \frac{1}{4}du$ y la regla de sustitución, tiene

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4} sen\, u + C$$

$$= \frac{1}{4} sen(x^4+2) + C$$

Advierta que en la etapa final tuvo que regresar a la variable original x.

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

**REGLA DE SUSTITUCIÓN PARA INTEGRALES DEFINIDAS** Si $g'$ es continua en $[a, b]$ y $f$ es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

**Ejemplo.** Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando la regla de sustitución para integrales definidas.

Si se aplica la sustitución, $u = 2x + 1 \;\; y \;\; dx = \frac{du}{2}$. Para encontrar los nuevos límites de integración, advierta que cuando x=0, u=2(0)+1=1 y cuando x=4, u=2(4)+1=9

Por lo tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9$$
$$= \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{26}{3}$$

**Método de integración por partes**

Toda regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, la regla de sustitución para integración corresponde a la regla de la cadena para derivación. La regla que corresponde a la regla del producto para derivación se llama regla para integración por partes.

La regla del producto establece que si $f$ y $g$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x)$$

O bien
$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Esta ecuación se puede reordenar como

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

La fórmula anterior se llama fórmula para **integración por partes.** Quizás es más fácil recordarla en la siguiente notación en términos de u por lo tanto, por la regla de sustitución, la fórmula para integración por partes se convierte en

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

**Ejemplo.** Evaluar $\int \ln x\,dx$

Aquí no se tiene mucha elección para u y du. Sea

$u = \ln x \quad dv = dx$
entonces
$du = \frac{1}{x}dx \quad v = x$
Al integrar por partes, se obtiene
$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x}$$
$$xlnx - \int dx$$

$$xlnx - x + C$$

Como se ha visto, la integración es más desafiante que la derivación. Para hallar la derivada de una función, resulta evidente cuál fórmula de derivación se debe aplicar. Pero podría no ser obvio con la técnica que se debe usar para integrar una función dada.
Hasta ahora se han aplicado técnicas individuales. Por ejemplo, normalmente se usó sustitución, integración por partes.

En la siguiente tabla se han reunido las integrales de la lista previa junto con varias fórmulas adicionales. La mayor parte se deben memorizar. Es útil conocer todas, pero las marcadas con un asterisco no necesitan ser memorizadas, puesto que se deducen con facilidad.

**TABLA DE FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN** Se han omitido las constantes de integración.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
3. $\int e^x\,dx = e^x$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
6. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$
8. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$
10. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$
12. $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x|$
13. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$
14. $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x|$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$
16. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

*19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

*20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

## 5.4 Relación de la integral con las ciencias administrativas

El estudio de la Matemática presenta grandes alternativas para el profesional de hoy, entre ellas la aplicación en el área administrativa, la cual permite relacionar fenómenos de la organización con la construcción de modelos matemáticos que den cuenta del comportamiento y las tendencias de las variables que intervienen en ella.

En la actualidad, las áreas administrativas, contables y económicas requieren de un profesional con conocimientos básicos de cálculo, de tal forma que lo lleven a incursionar en el campo investigativo y en la toma de decisiones, para generar nuevos conocimientos a partir de la integración de los conceptos propios y de las diferentes áreas de estudio, que lo hagan más competente en los retos del mundo moderno.

En particular las integrales tienen gran aplicación en la Administración y la Economía. A continuación se describen algunas de ellas.

**Curvas de aprendizaje**

En producción industrial, la administración a menudo debe estimar el número total de horas-hombre que requerirá a fin de producir un número determinado de unidades de su producto. Para la predicción de este número de horas se utiliza la curva de aprendizaje.
Se establece que una persona tiende a requerir menos tiempo en la ejecución de una actividad si ya la ha realizado con anterioridad un número de veces. Es decir, entre más repita una persona una actividad, será más eficiente y empleará menos tiempo al realizarla de nuevo. Así, entre más unidades se produzcan en una serie de producción, el tiempo de producir cada unidad irá disminuyendo.

Sea $T = F(x)$ el tiempo (por ejemplo, en horas-hombre) necesario en la producción de las primeras x unidades. Un incremento $\Delta x$ en la producción demanda un incremento $\Delta T$ en el tiempo, y la razón $\Delta T/\Delta x$ es el tiempo promedio por unidad adicional producida cuando el número de unidades producidas cambia de x a $x + \Delta x$. En el límite cuando $\Delta x \to 0$, esta razón se aproxima a la derivada $F'(x) = dT/dx$, que es el tiempo requerido por unidad adicional cuando ocurre un pequeño incremento en la producción. Al igual que las otras tasas marginales, esta cantidad es casi igual al tiempo requerido en la producción de la unidad siguiente; esto es, la unidad número (x +1).

Si se hace $F'(x) = f(x)$, la función que por lo general se utiliza es de la forma $f(x) = ax^b$ Donde $a$ y $b$ son constantes con $a > 0$ y $-1 \leq b < 0$ . La elección de $ax^b$ con $-1 \leq b < 0$ asegura que el tiempo requerido por unidad disminuye a medida que se producen más y más unidades.

Bajo la condición de que el mejoramiento en la eficiencia o aprendizaje sea regular, la curva de aprendizaje puede ser utilizada en la predicción del número total de horas-hombre requeridas en niveles de producción futuros.

El número total de horas-hombre $\Delta T$ requeridas a fin de producir unidades numeradas c+1 hasta d está dado por:

$\Delta T$ = (horas-trabajo para unidades producidas d)

-(horas- trabajo para producir las primeras c de ellas)

= F(d) -F(c) .

Esto es,

$$\Delta T = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d ax^b dx$$

**Ejemplo**.

Después de producir 1,000 televisores, una empresa determina que su planta de ensamblado está siguiendo una curva de aprendizaje de la forma

$$f(x) = 20x^{-0.152}$$

Donde f (x) es el número de hora-hombre requerida para ensamblar el televisor número (x +1). Estimar el número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4.000 televisores adicionales.

El número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4,000 televisores adicionales después de los primeros 1,000 está dado por:

$$\Delta T = \int_{1000}^{5000} f(x)dx = \int_{1000}^{5000} 20x^{-0.152}dx = \left[ 20.\frac{x^{-0.152+1}}{-0.152+1} \right]_{1000}^{5000}$$

$$= \frac{20}{0.848}\left[5000^{0.848} - 1000^{0.848}\right] = 23{,}59(1370 - 350) = 24.056$$

En consecuencia, el número de horas-hombre requeridas para ensamblar los 4,000 televisores adicionales es de 24,060.

**Maximización de la utilidad con respecto al tiempo**

Muchas empresas dejan de ser rentables con el tiempo. En estos casos, la tasa de ingreso R'(t) puede ser muy alta al inicio de la producción pero puede decrecer a medida que transcurre el tiempo, debido al agotamiento de algunos recursos, como es el caso de la explotación de minas o perforación de pozos petroleros.

En tal situación, R'(t) se convierte en una función decreciente con respecto al tiempo. Además, la tasa de costo C'(t) de producción es pequeña en un principio pero con frecuencia se incrementa a medida que el tiempo transcurre por el incremento en el mantenimiento u otros factores. Por ello, la tasa de costo C'(t) a menudo es una función creciente con respecto al tiempo. En estas producciones existe un tiempo en que los costos de mantener la producción se hacen más altos que el ingreso, y la empresa empieza a generar pérdidas. El administrador de dicha empresa afronta el problema de seleccionar el tiempo en el cual tendrá la máxima utilidad para cerrar la empresa.

Se utiliza la siguiente denotación:

- C(t) : costo total hasta el tiempo t.
- R(t) : ingreso total hasta el tiempo t.
- P(t) : utilidad total hasta el tiempo t.

Todas ellas medidas desde el inicio de la producción.

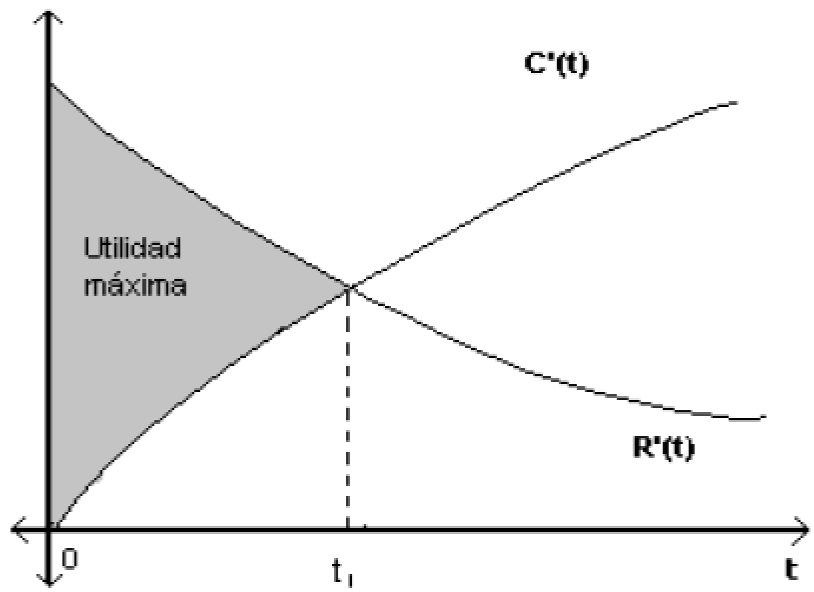
Matemáticamente se tendrá que:

$$P(t) = R(t) - C(t) \text{ y así mismo } P'(t) = R'(t) - C'(t)$$

La utilidad máxima total se tendrá cuando

$$P'(t) = 0 \text{ ó bien } R'(t) = C'(t)$$

En consecuencia, debe producirse hasta el tiempo $t_1$, en que $R'(t_1) = C'(t_1)$; Esto es, hasta el tiempo en el cual la tasa de ingreso y la tasa de costo sean iguales.




La utilidad total en el tiempo $t_1$ está dada por:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} P'(t)dt = \int_0^{t_1} [R'(t) - C'(t)]dt$$

Ésta será la máxima utilidad que puede obtenerse y puede interpretarse como el área de la región acotada por las gráficas de R'(t) y C'(t) situada entre $t = 0$ y $t = t_1$.

**Observación.** Puesto que $t = 0$ es el tiempo en que la empresa inicia la producción, el ingreso total R(0) en ese tiempo es cero. En el análisis anterior se supuso que el costo total C(0) era cero, lo cual no es cierto porque incurrieron costos fijos antes de iniciar la producción. De tal forma que, en la práctica, se deben restar los costos fijos de la expresión de $P(t_1)$ para obtener la utilidad máxima real.

**Ejemplo:**

Las tasas de costo e ingreso de una empresa dedicada a la explotación minera están dadas por:

$$C'(t) = 5 + 2t^{2/3} \text{ y } R'(t) = 17 - t^{2/3}$$

Donde C y R se miden en millones de pesos y t en años.

Determinar qué tanto deberá prolongarse la explotación y encontrar la utilidad total que puede obtenerse durante este período.

**Solución:**

El tiempo óptimo $t_1$ que dará como resultado la utilidad máxima es el tiempo en que las tasas de costo y de ingreso son iguales. Es decir,

$$C'(t) = R'(t)$$

$$5 + 2t^{2/3} = 17 - t^{2/3}$$

$$3t^{2/3} = 17 - 5 = 12$$

$$t^{2/3} = 4$$

$$t = 4^{3/2} = 8$$

$$P = \int_0^8 [R'(t) - C'(t)]dt$$

$$= \int_0^8 \left[17 - t^{2/3} - (5 + 2t^{2/3})\right]dt$$

$$= \int_0^8 (12 - 3t^{2/3})dt = \left[12t - 3\frac{t^{5/3}}{5/3}\right]_0^8$$

$$= 96 - \frac{9}{5}(32) = 38.2$$

Finalmente, la utilidad que puede obtener durante ocho años será de $ 38.2 millones de pesos.

## Referencias

Descubrimiento del cálculo. Recuperado el 29/05/2014 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo.pdf

Pérez, F. (2008).
VARIABLE. Universidad de Granada, Granada, España.

Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Thomson Editores, S. A. de C. V. Bogotá, Colombia.

**Posada, J (2008). Cálculo guía didáctica y módulo.** Facultad de Ciencias Administrativas, Económicas Y Contables. Colombia. Recuperado de**:** http://www.funlam.edu.co/administracion.modulo/NIVEL-02/Calculo.pdf